№13-дәріс.

Тақырыбы: Функционалдық катар туралы түсінік; оның нүктеде және жиында жинақтылығы.

Анықтама 1. Функционалдық қатар деп:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

мұндағы $u_i(x),\ i = 1,2,\ldots$ қатардың мүшелері функциялар болатын қатарды айтамыз.

x қандай да бір тұрақты мән берсек, (1) қатары сандық қатарға айналады. Сонымен, x-тің қандай да бір мәндерінде (1) қатары жинақты, қандай да бір мәндерінде жинақсыз.

Анықтама 2. (1) қатары жинақты болатын x мәндер жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Қатардың жинақтылық облысында қатардың қосындысы x-ке байланысты функция болатындықтан, қатардың қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

Мысал 1. $|x| < 1$ болған жағдайда, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1 = 1,\quad q = x$) және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ болса, онда $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ - қатардың қалдық мүшесі.

Теорема 1. (1) қатарының жинақтылық облысында:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0 .$$

Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға қолданылатын амалдар.

Анықтама 3. (1) қатары D облысында мажорланған деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін :

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, \ldots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \ldots$$

теңсіздігі орындалатындай,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots, \qquad (2)$$

таңбалары оң жинақты сандық қатар табылса.

Мысал 2.

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені,

$\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},\quad n = 1,2,\ldots ,$ ал $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ - қатары жинақты қатар (*мысал 5*).

D облысында мажорланған қатар, осы D облысында абсолютті жинақты. .

Анықтама 4. $[a;b]$ аралығында жинақты (1) қатары бірқалыпты жинақты деп аталады, егер барлық $n \ge N$ үшін $\forall \varepsilon > 0 : \exists N$,

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b] \text{ болса.}$$

Теорема 2. $[a;b]$ аралығында мажорланған (1) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты.

2-теоремадан мажорланған қатар болу бірқалыпты жинақтылықтан да күшті шарт екенін көреміз, яғни, бірқалыпты жинақталатын, бірақ мажорланған емес қатарлар табылады.

Теорема 3. (1) қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты және $S(x)$ - оның қосындысы болсын. Онда егер:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} u_i(x), \quad i=1,2,...$ - табылса, онда

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} u_1(x) + \lim_{x\to x_0} u_2(x) + ... + \lim_{x\to x_0} u_n(x) + ..., \quad x_0 \in [a;b]$$

2. қатардың мүшелері $u_i(x), \quad i=1,2,...$ - $[a;b]$ аралығында үзіліссіз және $S(x)$ функциясы да $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$\int_{x_0}^{x_1} S(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)\,dx ... + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx + ..., \quad x_0 \in (a;b),\ x_1 \in (a;b),$$ яғни,

қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

Теорема 4. Егер (1) қатары $[a;b]$ аралығында жинақты болса, $u_i(x) \in C^1[a;b], \quad i=1,2,...$, ал

$u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ...$ қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ... \quad \forall x \in [a;b],$$

яғни, қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

Дәрежелік қатарлар.

Дәрежелік қатар функционалдық қатарлардың дербес түрі.

Анықтама 5. $(x-a)$ –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \tag{3}$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2,...$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (4)

Теорема 5. (Абель). $x = x_0$ болғанда (4) қатары жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ болғанда абсолютті жинақты; ал оның $x = x_0$ болғанда жинақсыз болуынан, $|x| > |x_0|$ болғанда жинақсыздығы шығады.

Абель теоремасынан: (4) қатары үшін жалғыз ғана R саны, $0 \le R \le \infty$, табылады, $|x| < R$ болғанда (2) қатары жинақты, ал $|x| > R$ үшін жинақсыз болатындай.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады, ал $(-R;R)$ - жинақтылық интервалы деп аталады. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса, онда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| a_k x^k \right|$

қатарына Даламбер белгісін қолдансақ,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R, \text{ яғни, } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 3. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$ қатарының жинақтылық облысын тап.

$a_n = \dfrac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n = 1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots$ -таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар (*мысал 6*). Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(3) қатарының жинақтылық интервалы $(a - R;\ a + R)$, мұндағы R - (4) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (3) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (3) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (3) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.
3. (3) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (3) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей.

Мысал 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын тап.

Шешуі. $c_n = \dfrac{1}{n}$ болады, онда жинақтылық радиусы $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$;

$(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

$x = -1$ болсын, онда берілген қатар: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ түрінде болады.

Бұл қатар шартты жинақты, себебі $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ жинақсыз және

а) $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

$x = 1$ болса, берілген қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ - гармониялық қатар және ол жинақсыз қатар. Сонымен, берілген қатар $x \in (-1,1)$ аралығында абсолютті жинақты, $x = -1$ болғанда шартты жинақты.

Мысал 5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n \neq 0$ егер $n = 3,4,...$ болса.

Онда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)} = 1$.

Сонымен, $R = 1$ - жинақтылық радиусы; $(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$x = -1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)} = -\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)} : \frac{1}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)} = 1 \neq 0 .$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $x = -1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $x = 1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum\limits_{n\to 0}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $x \in [-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.

Тейлор қатары.

$y = f(x)$ функциясының қандай да бір a нүктесінің аймағында $(n+1)$ - ші ретті туындысы бар болсын. Дәрежесі n-нан жоғары емес төмендегі теңдік орындалатын $P_n(x)$ көпмүшелігін табалық:

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a),..., P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{5}$$

$P_n(x)$ көпмүшелігін мына түрде іздейміз:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^k$$

$P_n^{(i)}(x)$-ті тауып және (5) шартын қолдансақ:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) .$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ - қалдық мүшесі болсын. Онда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ және $R_n(x)$ - ті Лагранж формасында жазуға болатынын көрсетуге болады:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = a + \Theta(x-a), \quad 0 < \Theta < 1$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (6)$$

(6) формуласы Тейлор формуласы деп аталады, ал $a = 0$ болса, Маклорен формуласы деп аталады.

Бұл формулалар $y = f(x)$ функциясын $P_n(x)$ көпмүшелігімен $|R_n(x)|$-ға тең дәлдікте айырбастауға мүмкіндік береді.

Мысал 6. $y = e^x$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте және e санын $\varepsilon = 10^{-5}$ дәлдікке дейін есепте.

$y = f(x) = e^x,\ f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = e^x,\ f'(0) = 1 \Rightarrow ... \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x,\ f^{(n+1)}(\xi) = f(\Theta x) = e^{\Theta x} \Rightarrow$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1$$

$x = 1$ болса, $R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\Theta x} < \frac{3}{(n+1)!}$. $n = 1,2,3,..., 7$ үшін: $\frac{3}{(n+1)!} > 10^{-5}$, ал $n = 8$ үшін: $\frac{3}{9!} < 10^{-5}$ болғандықтан, $n = 8$. Сонымен,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} = 2.71828 \quad .$$

a нүктесінің аймағында $y = f(x)$ функциясы шексіз рет дифференциалданатын болсын. Онда n -ді өте үлкен шама деп ала отырып, (4) теңдігінің оң жағында дәрежелік функция аламыз. Қандай шарт орындалғанда бұл қатардың қосындысы $S(x) = f(x)$ тең?

Теорема 6. Егер $f(x)$ функциясы $D = (a - r; a + r)$ интервалында шектеусіз рет дифференциалданатын болса және $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in D$, онда D -да:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ... , \qquad (7)$$

Әрі, қатардың $f(x)$ функциясына D -да жинақталуы бірқалыпты.

Анықтама 6. (7) қатары Тейлор қатары деп аталады, ал егер $a = 0$ болса, ол Маклорен қатары болады.

Әрбір элементар функция үшін $(a - R; a + R)$ интервалында Тейлор қатарына жіктелетіндей a және R сандары табылатындығын айта кеткен жөн.

Кейбір функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін дәлелдеусіз көрсетеміз:

1. $y = e^x, \quad R = \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

2. $y = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$

$$Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

3. $y = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$

$$\cos x = ...$$

4. $y = \ln(1 + x), \quad -1 < x < 1$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

5. $y=(1+x)^m, \quad m-const, \quad -1<x<1$

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...+\frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}x^n+...$$

Е с к е р т у . Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялар үшін де қолдануға болады. *Мысалы:*

1. $\ln(1-x) = -1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...\,, \qquad -1<x<1$

2. $cosx^2 = 1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+...\,, \qquad -\infty<x<\infty$

3. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$. $(1+x)^m$ жіктелуіндегі $m=-\frac{1}{2}$ деп есептейміз және х-тің орнына $(-x^2)$-ты қоямыз. жинақтылық интервалы: $\left|-x^2\right|=\left|x^2<1\Rightarrow -1<x<1\right|$ болады және:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+... .$$

4) $y=\arcsin x$. $y'=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болғандықтан, $-1<x<1$ үшін:

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+..)\,dt \Rightarrow$$

$$arcsin\ x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+...\,, \qquad -1<x<1.$$

Бұл қатар $x=\pm 1$ болғанда жинақты екенін көрсетуге болады. Онда $x=1$ болғанда:

$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+...$. Бұл π -ді есептеу формуласы.

Алғашқы функциясы элементар функциялар болмайтын интегралдарды кейде қатарлардың көмегімен есептеуге болады.

Мысал 7. $I=\int_0^a e^{-x^2}dx$ интегралын есепте.

Шешуі. $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...\,, -\infty<x<\infty$, екенін ескеріп, екі жағын да интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\int_0^a[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...]\,dx=(x-\frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^7}{7}+...)\Big|_0^a=$$

$$=a-\frac{1}{1!}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{a^7}{7}+...) .$$

Тейлор қатары, жалпы айтқанда, дәрежелік қатарлар дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу үшін жиі қолданылады.

Мысал 8. Берілген теңдеуінің жалпы шешімін тап:

Шешуі. $y''=2xy'+4y\,,\quad y(0)=0, y'(0)=1.$

Шешімді $y=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ түрінде іздейміз.

Бастапқы шарттарды ескерсек: $a_0=y(0)=0, \quad a_1=y'(0)=1.$

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$
$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$
$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \dots + n\cdot(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

Ары қарай, y, y', y'' -терді теңдеуге қойып, x -тің бірдей дәрежелерінің коэффиценттерін теңестірсек:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$3\cdot 2\cdot a_3 = 2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1$$
$$4\cdot 3\cdot a_4 = 4a_2 + 4a_2 \Rightarrow a_4 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$
$$n(n-1)a_n = (n-2)\cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Ендеше, $a_{2k} = 0, k = 1,2,\dots$.

$$a_5 = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2!},\ a_7 = \frac{2\cdot\frac{1}{2!}}{6} = \frac{1}{3!}, \dots,\ a_{2k+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \dots$$

Бұдан, дербес шешім

$$y = x + \cdot\frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Мысал 9. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясын $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. Туындыларын табамыз:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ f'''(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ f^{(4)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}, \dots$$

$x = 1$ болғанда:

$$f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 1\cdot 2, f'''(1) = -1\cdot 2\cdot 3, f^{(4)}(1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \dots$$
$$\dots, f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n = (-1)^n\cdot n!, \dots \quad .$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатары мына түрде болады:

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \ .$$

Алынған қатар еселігі $q = -(x-1)$ болатын геометриялық қатар:

$$|q| = |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \ .$$

Ендеше, қатар $x \in (0,2)$ аралығында абсолютті жинақты. Онда

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad x \in (0,2).$$

*Мысал 10***.** Берілген функцияны Тейлор қатарына жікте:

$$f(x) = \frac{5-x}{12-x-x^2}.$$

Шешуі. Берілген бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{5-x}{(x+4)(3-x)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{3-x};$$

$$5-x = A(3-x) + B(x+4).$$

Бұдан, $x = 3$ және $x = -4$ дей отырып, $A = \frac{9}{7}$, $B = \frac{2}{7}$ екендігін аламыз.Ендеше,

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{x+4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3-x}. \qquad (8)$$

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}$, $|q| < 1$ формуласын қолданып, әрбір қарапайым бөлшектерді жеке-жеке қарастырамыз:

$$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{4^n} + \ldots\right), \quad \left|\frac{x}{4}\right| < 1;$$

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \ldots + \frac{x^n}{3^n} + \ldots\right), \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1.$$

Табылған жіктеуді (8)-ге қойсақ:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{9}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4^{n+1}} + \frac{2}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{9}{7} \cdot \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} + \frac{2}{7 \cdot 3^{n+1}}\right] x^n,$$

және $\begin{cases} -4 < x < 4, \\ -3 < x < 3, \end{cases} \Rightarrow x \in (-3,3)$ болады.

Сонымен, $\displaystyle \frac{5-x}{12-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9 \cdot (-1)^n}{7 \cdot 4^{n+1}} + \frac{2}{7 \cdot 3^{n+1}}\right) \cdot x^n, \quad x \in (-3,3).$

Мысал 11. $f(x) = \sin^2 x$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ екені бізге мектеп курсынан белгілі..

$\cos 2x$ функциясын 3 пункттегі формула бойынша жіктесек (x -ті $2x$ -ке ауыстырсақ), онда:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$, егер

$x \in (-\infty, +\infty)$.

Мысал 12. $f(x) = ln\frac{2+x}{2-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $ln\frac{2+x}{2-x} = ln\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ қарастырамыз.

5 пункттегі жіктеуді қолдансақ, x -ті сәйкесінше $\frac{x}{2}$ және $(-\frac{x}{2})$ -пен алмастырсақ:

$$ln\frac{2+x}{2-x} = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2\cdot 2} + \frac{x^3}{2^3\cdot 3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n\cdot n} + \ldots\right) -$$

$$-\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2\cdot 2} - \frac{x^3}{2^3\cdot 3} - \ldots - \frac{x^n}{2^n\cdot n} - \ldots\right) = x + \frac{x^3}{2^3\cdot 3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)} + \ldots$$

Алынған жіктеу дұрыс болады, егер $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, яғни, $|x| < 2$ болса.

Мысал 13. $f(x) = \sqrt{1-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots ,$$

мұндағы $x \in (-1{,}1)$, жіктеуін қолданамыз. $m = \frac{1}{2}$ деп алып, x -ті $(-x)$ -ке айырбастасақ, онда

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots .$$

Жіктеу дұрыс болады, егер $|-x| < 1$, яғни, $|x| < 1$.